합격의 기준

박문각임용

이행래 전공수학

◈ 이행래 전공수학 A형 모의고사 문제

◈ 이행래 전공수학 B형 모의고사 문제

◈ 이행래 전공수학 모범답안

PMG 박문각임용

2020학년도 대비 이행래 수학 모의고사

수　　학

1차 시험	2교시 A형	12 문항 (40)점	시험 시간 90분

수험생 유의 사항

1. 문제지 및 답안지의 전체 면수와 인쇄 상태를 확인하고 답안지는 2면입니다
2. 답안지 모든 면의 상단에 성명과 수험 번호를 기재하고, 컴퓨터용 사인펜을 사용하여 수험 번호를 해당란에 ● 로 표기합니다.
   ●로 표기한 부분을 수정하고자 할 경우에는 반드시 수정 테이프를 사용해야 합니다.
3. 각각의 문항에 대한 답안은 **해당 문항의 전용 답안지에 작성**하고 답안지에는 문제를 기재하지 않습니다.
4. 답안은 **지워지거나 번지지 않는 동일한 종류의 검은색 펜을 사용**하여 야 하며 연필이나 사인펜 종류는 사용할 수 없습니다.
5. 필요한 경우 해당 문항의 답안란에 세로 선을 그어 다단으로 나누어 답안을 작성합니다.
6. 답안의 초안 작성은 문제지 여백을 활용합니다.
7. 답안을 **수정할 때에는 반드시 두 줄(=)을 긋고 수정할 내용을 작성**하며 수정 테이프 또는 수정액을 사용하여 답안을 수정할 수 없습니다.
8. 답안의 특정 내용을 강조하기 위하여 밑줄을 칠 수 없으며, 문제에 대한 답안 내용 이외에는 기타 어떠한 내용도 일절 표시할 수 없습니다.
9. 답안지 교체가 필요한 경우에는 답안 작성 시간을 고려하시기 바라며
   종료종이 울리면 답안을 일절 작성할 수 없으며, 답안지 교체 후에는 교체 전 답안지를 폐 답안지로 처리합니다.
10. **다음에 해당하는 답안은 채점하지 않습니다**

    - 답안란 이외의 공간(옆면, 뒷면 등)에 작성한 부분
    - 내용이 지워지거나 번지는 등 식별이 불가능한 부분
    - 연필로 작성한 부분, 수정 테이프 또는 수정액을 사용하여 수정한 부분
    - 개인 정보를 노출하거나 암시하는 표시(성명 및 수험 번호 기재란 제외)가 있는 답안지 전체

11. 시험 종료 시에는 답안 작성을 중지하고 감독관의 지시에 따라 제출하여야 합니다.**(시험 종료 후 답안 작성은 부정 행위로 간주합니다)**
12. 답안을 작성하지 않은 빈 답안지에도 성명, 수험 번호 기재·표기한 후, 답안지를 모두 제출합니다.
13. 위의 사항을 위반하여 작성한 답안은 채점 시 불이익을 받을 수 있습니다.
14. 답안지 양식과 수험생 유의사항을 참고하시기 바라며 예시로 제공되는 답안지 양식은 출제 상황 및 과목 특성 등에 따라 변경될 수 있습니다.

2020학년도 대비 이행래 수학 모의고사

수　　학

1차 시험	2교시 A형	12 문항	시험 시간 90분

○문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
○모든 문항에는 배점이 표시되어 잇습니다.

1. 지식 습득 및 표현 과정에서 나타나는 잘못은 오개념 또는 오류로 분류된다. 오개념과 오류 분류방식은 다양하게 나타날 수 있으며, 각각 장단점을 가지고 있다. 그러므로 교사는 여러 가지 분류 방식에 대해 통합적으로 이해하고 학생들의 오개념과 오류를 진단할 수 있어야 한다. 수학은 (　㈎　)가(이) 강한 학문이므로 학습 상황에서 오개념이 생겼을 때 이를 즉시 해결하지 않으면 이를 바탕으로 또 다른 오개념이 발생할 수 있다. ㈎에 들어갈 내용을 수학과의 특성에서 쓰시오. [2점]

2. 체 Z_3 위의 행렬에 대하여 연산이 행렬과 곱셈인 군

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a,\, b,\, c \in Z_3,\ ac \neq 0\right\}$$

에 대하여 G의 위수를 m이라 하고, G에서 곱셈군 $Z_3^* = Z_3 - \{0\}$으로의 군 준동형사상

$$\phi : G \to Z_3^*,\ \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = ac$$

의 핵(kernel) $\ker\phi$의 부분군의 개수를 n이라 할 때 자연수 $m+n$을 구하시오. [2점]

3. 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ 의 수렴구간을 구하시오. [2점]

4. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행을 12 회 반복할 때, 한 번 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b 라 하자. 부등식 $a^2+b^2 \leq 25$ 를 만족하는 횟수를 확률변수라 할 때, 이 확률변수의 분산을 구하시오. [2점]

5. Piaget에 따르면 개인에게는 환경과의 균형을 이룩하여 행동 및 사고 양식의 무모순성을 달성하려는 기본적인 욕구가 있고, 그러한 균형화 과정에서의 행동 및 사고 양식의 변화가 학습이다. 개념 이해을 이러한 균형화의 과정에서 파악한다면, 새로운 개념을 기존의 인지 구조에 통합시기키는 동화 작용과 새로운 개념에 맞게 학습자의 기존의 인지 구조를 변화시키는 조절 작용을 통해 그 의미가 학습자의 인지 구조의 일부로 구성되었을 때 개념이 이해된 것이라고 할 수 있다. Piaget의 이러한 입장에 기초하면, 학생들이 개념을 이해하는 데 어려움을 겪는 원인은 크게 두 가지로 볼 수 있다. 다음은 위 두 가지 원인에 대한 두 교사의 가상 대화이다.

가상대화

교사 A : 두 가지 원인 중 하나는 새로운 개념을 기존의 인지 구조에 적절히 동화하기 어려운 경우라 생각합니다. 그리고 다른 하나는 새로운 개념의 이해가 학생의 기존의 인지 구조의 조절을 필요로 하는 경우입니다.

교사 B : 맞아요. 선생님의 말씀 중 후자의 경우를 인식론 장애라 할 수 있죠.

교사 A : 네, 소수 개념과 관련된 인식론적 장애는 어떤 것이 있을 까요 ?

교사 C : 학교수학에서 소수는 주로 자를 이용한 길이의 측정이나 눈금저울을 사용한 무게의 측정 맥락에서 측정단위 변환과 관련지어 등장합니다. 그 결과 ㈎ 소수를 단위를 수반한 양의 표현으로 이해하는 경우입니다.

교사 D : 또, ㈏ 소수를 소수점을 갖는 자연수로 이해하는 경우입니다.

위 가상대화 에서 ㈎, ㈏와 같이 이해할 때, 나타날 수 있는 문제점을 구체적인 예와 함께 각각 한 가지씩 순서대로 제시하고 문제점을 설명하시오. [4점]

6. 문제 해결 전략에는 예상과 확인, 표 만들기, 식 세우기, 규칙성 찾기, 그림 그리기, 단순화하기 등의 전략이 있다. 이 중 다음 문제를 해결하기에 가장 적합한 문제 해결 전략 중 보조전략과 주요전략을 각각 순서대로 쓰고, 전략에 맞추어 문제를 해결하시오. [4점]

어느 중학교의 학생 수는 500명이다. 남학생이 여학생보다 200명이 더 많다고 한다. 남학생의 수학 평균 점수가 60점이고 전체 평균 점수는 66.5이라고 한다. 이때, 여학생의 평균점수는?

7. $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 17, a_3 = 49, a_4 = 105$ 인 계차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 을 구하시오. [4점]

8. 좌표공간에서 두 단위속력곡선

$$\alpha(t) = \left(3\cos\frac{t}{5},\, 3\sin\frac{t}{5},\, \frac{4}{5}t\right),$$

$$\beta(t) = \left(3\cos\frac{t}{5},\, 3\sin\frac{t}{5},\, -\frac{4}{5}t\right)$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. [4점]

(1) 곡선 α 의 곡률(curvature) $\kappa_\alpha(t)$ 와 β 의 곡률 $\kappa_\beta(t)$ 를 각각 구하시오.

(2) 곡선 α 의 열률(꼬임률, 비틀림률, torsion) $\tau_\alpha(t)$ 와 β 의 열률 $\tau_\beta(t)$ 를 각각 구하시오.

9. 다음 적분값을 구하시오. [4점]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

10. 함수 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & , x = \dfrac{m}{n}, (m, n) = 1 \\ 0 & , x \in \boldsymbol{R} - \boldsymbol{Q} \cup \{0\} \end{cases}$$

로 정의할 때 함수 f 가 $x = 0$ 에서 미분가능한지 조사하고 미분가능하면 미분계수를 구하고, 미분 불가능하면 그 이유를 설명하시오. [4점]

11. 단순연분수 $\theta = <1, 1, 1, \cdots>$ 를 구하시오. 또, 피보나치 수열 $\{F_n\}$

$$1, 1, 2, 3, 5, \cdots, \ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ (n \geq 3)$$

에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ 를 구하고, 그 이유를 설명하시오. [4점] (단, 답만 제시하면 0점 처리함)

12. 유리수 체 $\boldsymbol{Q}$의 이차체 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$와 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{3})$에 대하여

$$T : \boldsymbol{Q}(\sqrt{2}) \to \boldsymbol{Q}(\sqrt{3}),\quad T(a+b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{3}$$

와 같이 정의하면 T는 유리수 체 $\boldsymbol{Q}$위에서 선형변환이다. T의 표준행렬을 구하고 표준행렬의 고윳값과 그에 대응하는 고유벡터를 구하시오. 또, 이차체 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$와 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{3})$이 체로서 동형적이지 않는 이유를 간략하게 설명하시오. [4점]

<수고하셨습니다.>

2020학년도 대비 이행래 수학 모의고사

수　　학

1차 시험	3교시 전공B	11 문항 (40점)	시험 시간 90분

수험생 유의 사항

1. 문제지 및 답안지의 전체 면수와 인쇄 상태를 확인하고 답안지는 2면입니다
2. 답안지 모든 면의 상단에 성명과 수험 번호를 기재하고, 컴퓨터용 사인펜을 사용하여 수험 번호를 해당란에 ● 로 표기합니다.
   ●로 표기한 부분을 수정하고자 할 경우에는 반드시 수정 테이프를 사용해야 합니다.
3. 각각의 문항에 대한 답안은 **해당 문항의 전용 답안지에 작성**하고 답안지에는 문제를 기재하지 않습니다.
4. 답안은 **지워지거나 번지지 않는 동일한 종류의 검은색 펜을 사용**하여 야 하며 연필이나 사인펜 종류는 사용할 수 없습니다.
5. 필요한 경우 해당 문항의 답안란에 세로 선을 그어 다단으로 나누어 답안을 작성합니다.
6. 답안의 초안 작성은 문제지 여백을 활용합니다.
7. 답안을 **수정할 때에는 반드시 두 줄(=)을 긋고 수정할 내용을 작성**하며 수정 테이프 또는 수정액을 사용하여 답안을 수정할 수 없습니다.
8. 답안의 특정 내용을 강조하기 위하여 밑줄을 칠 수 없으며, 문제에 대한 답안 내용 이외에는 기타 어떠한 내용도 일절 표시할 수 없습니다.
9. 답안지 교체가 필요한 경우에는 답안 작성 시간을 고려하시기 바라며
   종료종이 울리면 답안을 일절 작성할 수 없으며, 답안지 교체 후에는 교체 전 답안지를 폐 답안지로 처리합니다.
10. **다음에 해당하는 답안은 채점하지 않습니다**

   ◦ 답안란 이외의 공간(옆면, 뒷면 등)에 작성한 부분
   ◦ 내용이 지워지거나 번지는 등 식별이 불가능한 부분
   ◦ 연필로 작성한 부분, 수정 테이프 또는 수정액을 사용하여 수정한 부분
   ◦ 개인 정보를 노출하거나 암시하는 표시(성명 및 수험 번호 기재란 제외)가 있는 답안지 전체

11. 시험 종료 시에는 답안 작성을 중지하고 감독관의 지시에 따라 제출하여야 합니다.**(시험 종료 후 답안 작성은 부정 행위로 간주합니다)**
12. 답안을 작성하지 않은 빈 답안지에도 성명, 수험 번호 기재·표기한 후, 답안지를 모두 제출합니다.
13. 위의 사항을 위반하여 작성한 답안은 채점 시 불이익을 받을 수 있습니다.
14. 답안지 양식과 수험생 유의사항을 참고하시기 바라며 예시로 제공되는 답안지 양식은 출제 상황 및 과목 특성 등에 따라 변경될 수 있습니다.

2020학년도 대비 이행래 수학 모의고사

수　　학

1차 시험	3교시 전공B	11 문항 40점	시험 시간 90분

○문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
○모든 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

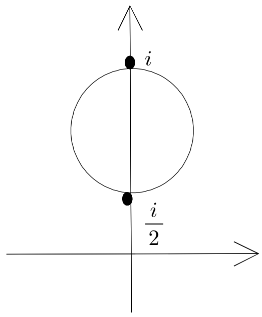
1. $T : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, $T(x, y, z) = (x+1, y-2, z+3)$ 이고,

$$F : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3,\ F = T \circ A,\ A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

일 때, $t=0$ 에서 $F(\alpha(t))$ 의 곡률과 열률(비꼬임)의 절댓값의 합을 구하시오. [2점]

(단, 곡선 $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^2)$ 이다.)

2. C가 아래의 그림과 같은 경로일 때, $\int_C e^{\pi z} dz$ 를 구하시오. (단, C는 시점은 i 이고 종점은 $\frac{i}{2}$ 인 반시계방향의 반원이다.) [2점]



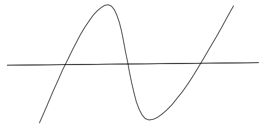
3. 중학교 1학년인 철수는 방정식을 풀 때,

$$x+3 \ \ = 7 \ \ = 7-3 \ \ = 4$$

와 같은 풀이 과정을 나타내었다. 이러한 오류가 나타나게 되는 이유를 등호의 관점에서 구체적으로 설명하고 개선하기 위한 지도 방법을 설명하시오. [4점]

4. 다음은 극대· 극소에 대한 지도방법을 Lakatos의 준경험주의 수리철학에 입각하여 지도하고 있는 교사와 학생들의 가상 대화이다. 가상 대화에서 민주의 추측은 귀납에 의한 것이 아니라 소박한 추측이다. 소박한 추측을 얻기 위해 교사는 어떤 행동을 하였는지 구체적으로 쓰시오. 또, 보라의 반례는 (㈎) 반례이다. ㈎를 쓰고 교사의 증명 중 1단계가 참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 제시 하시오.[4점]

교사 :그래요. 그런데 이차함수의 그래프보다 더 복잡한 아래와 같은 그래프의 개형을 그리려면 무엇을 알아야 할까요?



지용 :봉우리처럼 생긴 곳의 좌표를 알면 대강 그릴 수 있겠는데요?

교사 :그래요. 그러한 점들의 y값을 극값이라고 합니다. 다시 말해서, 함수가 x의 어떤 값의 좌·우에서 증·감 상태가 바뀔 때 그 함수는 바로 그 점에서 극값을 갖는다고 합니다. 그런데, x가 a를 지나면서 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 '극소'가 되며 극솟값을 갖는다고 하고, 증가상태에서 감소 상태로 변하면 '극대'가 되고 극댓값을 갖는다고 합니다. 그런데, 극값을 갖는 점에서의 미분계수는 어떻게 될까요?

민주 :미분계수가 0이 됩니다. 그러면 "연속함수 $f(x)$는 $f'(a)=0$일 때 $x=a$에서 극값을 갖는다."고 할 수 있겠는데요?

교사 : 다른 학생들도 그렇게 생각하나요?

… 중략 …

교사 : 민주의 주장을 증명할 학생은 없나요

학생들 : ???

교사 :그러면 내가 한번 해 보지요.

1단계 : 연속함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 연속입니다

2단계 : $f'(x)$는 $f'(a)=0$ 이고 $x=a$에서 $f'(x)$는 연속이므로 $x=a$를 경계로 하여 $f'(x)$의 부호가 바뀌게 됩니다.

3단계 : $x=a$의 좌·우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 이 함수는 $x=a$에서 극값을 갖습니다.

보라 : 선생님 그런데 함수 $f(x)=x^3$은 연속함수이고 $f'(a)=0$이지만 계속 증가만 하기 때문에 $x=0$에서 극값을 갖지 않습니다.

5. 2015 개정 교육과정에서 중학교 함수는 “변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 함수는 대응과 종속의 의미를 포함하며, 그래프는 함수를 시각적으로 표현하는 도구이다.” 중학교 수학에서 나오는 기울기는 x 의 값의 증가량에 대한 y 값의 증가량으로 정의한다. 함수 $y = f(x) = ax + b$ 에서 시각적 관점, 분석적 관점에서 기울기를 각각 설명하시오. [4점]

6. 이변량 확률변수 $(X,\ Y)$ 의 결합확률밀도함수가

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\,(x^2+y^2)\ , & 0 < x,\ y < 1 \\ 0 & ,\ \text{그 밖의 경우} \end{cases}$$

일 때, 두 확률변수 $X,\ Y$ 의 독립성을 설명하고, 확률변수 X 의 기댓값 $E(X)$ 를 구하시오. [4점]

7. $P_2[x] = \{a+bx+cx^2 \mid a,b,c \in \boldsymbol{R}\}$ 로 놓으면 $P_2[x]$ 는 실수체 $\boldsymbol{R}$ 위에서 3차원 벡터공간이 된다. $T : P_2[x] \to P_2[x]$, $T(f(x)) = f(x) + xf'(x) + f'(x)$ 로 정의 할 때 다음 물음에 답하시오. [4점]

(1) T를 행렬로 나타내시오. (단, 기저는 $1, x, x^2$ 이다.)

(2) T의 고윳값과 그에 대응하는 고유공간을 구하고, 그 결과를 이용하여 T가 대각 가능한 변환인지 판정하시오.

8. 실수 전체의 집합 $\boldsymbol{R}$ 위에서 여 가산위상(countable complement topology) $\mathfrak{I}$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathfrak{I} = \{\, U \subseteq R \mid R-U \text{는 가산집합} \,\} \cup \{\varnothing\}$$

$\boldsymbol{R}$의 긴밀부분집합(compact) A 에 대하여 상대 위상을 $\mathfrak{I}_A$ 로 놓을 때 compact공간 A 에서 임의의 서로 소인 두 폐집합 F_1, F_2 에 대하여

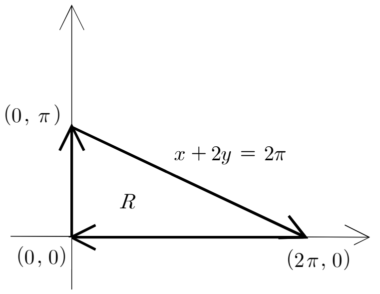
$$F_1 \subset G_1,\ F_2 \subset G_2,\ G_1 \cap G_2 = \varnothing$$

를 만족하는 열린집합 G_1, G_2 가 존재함을 보이시오. 또, 여 가산 위상공간 $\boldsymbol{R}$ 에서 위의 조건을 만족하는 서로 소인 폐집합 F_1, F_2 를 모두 구하시오. [4점]

9. 영역 R이 아래 그림(삼각형의 내부)과 같을 때 중적분

$$\iint_R \sin(x+2y)\cos(x-2y)\,dA$$

를 구하시오. [4점]



10. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 이 절대수렴함을 보이고, 다음 급수의 수렴 · 발산을 판정하고 그 이유를 설명하시오. (단, 답만 쓰면 0점 처리함) [4점]

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots$$

11. 정수환 $\boldsymbol{Z}$에 대하여 $S = \boldsymbol{Z} - 11\boldsymbol{Z}$로 놓고, 환 $R = \left\{\frac{a}{s} \mid a \in \boldsymbol{Z},\ s \in S\right\}$은 정역이다. R의 이데알 $M = \left\{\frac{a}{s} \mid a \in 11\boldsymbol{Z},\ s \in S\right\}$에 대하여 R의 단원집합을 구하고, R의 단위원 1_R에 대하여 $1_R \not\in I$인 R의 이데알 I에 대하여 $I \subset M$임을 보이시오. [4점]

<수고 하셨습니다.>

이행래 전공수학

모의고사 해설

담당교수 : 이행래

정 답 표(A)

번 호	영 역	정 답
1(2점)	교과 교육론	· 계통성
2(2점)	현대대수학	· $m+n=16$
3(2점)	해석학	· $(-5,1)=\{x\in \boldsymbol{R} \mid -5<x<1\}$
4(2점)	확률과 통계	· $V(X)=npq=12\times\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{35}{12}$
5(2점)	교과교육론	· 해설 참조
6(2점)	교과교육론	· 해설 참조
7(2점)	이산수학	· $a_{10}=f(10)=1281$
8(2점)	미분기하학	· 해설 참고
9(4점)	복소함수론	· $\frac{\pi(e^{-1}-e^{-2})}{3}$
10(4점)	해석학	· 해설참고
11(4점)	정수론	· $\theta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$
12(4점)	현대대수학	

정 답 표(B)

번 호	영 역	정 답
1(4점)	미분기하학	· $\lvert k \rvert + \lvert \tau \rvert = \frac{\sqrt{38}}{18} + \frac{3}{19}$
2(4점)	복소함수론	· $F(\frac{i}{2}) - F(i) = \frac{1+i}{\pi}$
3(4점)	교과교육론	· 해설참고
4(4점)	교과교육론	· 해설참고
5(4점)	교과교육론	· 해설참고
6(5점)	확률과 통계	· 두 확률변수 X와 Y는 서로 독립이 아니다. · $E(X) = \frac{5}{8}$
7(5점)	선형대수학	· 해설참고
8(4점)	위상수학	· $(A, \mathfrak{I}_A)$가 이산공간임을 이용 · $F_1 = \varnothing$ 이거나 $F_2 = \varnothing$ 이다.
9(4점)	미적분학	· $\frac{\pi}{2}$
10(4점)	해석학	
11(4점)	현대대수학	

2교시 : 기입형 및 서술형 문제

1. 계통성

수학의 특성으로서 실용성, 추상성, 이상성, 형식성, 계통성, 직관성과 논리성, 일반화와 특수화 등이 거론된다. 이것을 좀 더 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

1 실용성

수학은 실용성을 그 특성으로 한다. 원래 수학은 실제 생활의 요구와 자연의 탐구에서 비롯되었다. 비록 그러한 수학이 이론 수학으로 발전하였으며, 현재 응용과는 무관하게 공리로부터 순수하게 수학이 전개되고 있을지라도, 수학이 타학문과 실생활에 모델로 적용하고 있으며, 또 장차 작용할 개연성이 대단히 높다는 것은 부인할 수 없는 사실이다.

2 추상성

어떤 구체물의 집단이 있을 때, 각 구체 물이 가지는 속성 중에서 이질적인 속성을 제거하여 나가면 결국 동질적인 속성만 남게 되는데, 각 구체 물이 지니는 이 동질적인 속성을 끄집어내는 것을 추상화라고 한다. 예를 들어, 성냥갑, 벽돌, 상자 등이 지닌 여러 가지 속성 중에서 이질적인 속성, 즉 각 물질적인 속성, 곧 공통된 성질만을 생각하면 직육면체의 개념을 얻게 된다. 이와 같이, 직육면체는 구체적인 물리적 대상에서 추상화가 이루어진 것이다. 한편, “임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 P, Q를 지나는 직선 l이 유일하게 존재한다.”는 유클리드의 공리는 직선을 그어 보는 경험의 추상화를 통하여 이끌어 내어진 것이다. 이처럼, 수학의 추상성이란 우리가 느끼고, 맛보고, 냄새 맡고, 듣고, 볼 수 있는 물리적 세계나 그 세계에 대한 우리의 경험을 직접 다루는 것이 아니라, 우리 마음속에 있는 아이디어를 다루는 것이다. 이와 같이 수학에서 다루는 대상은 대부분 추상화하여 얻어진 개념으로, 수학은 이들 개념 사이의 상호 관련성을 이론적으로 따져 나가는 것이라 볼 수 있다. 이 때, 물리적 대상의 수학적 대상으로의 추상화는 특별히 선택적으로 이루어진다. 또, 원, 삼각형 등으로부터 단일 폐곡선이라는 개념이 추상화되듯, 이미 추상화된 수학적 대상이 다시 추상화되기도 한다(물리적 대상의 추상화 → 수학적 대상의 추상화). 이와 같이, 추상화의 수준이 증가하는 방향으로 추상화는 계속 이루어지기도 한다.

3 이상성

추상성과 밀접하게 관련된 것으로, 수학적 사고 과정에서 그 사고의 대상인 사물이나 현상에 대하여 사고의 대상이 되는 사물이나 현상을 그 겉모양으로 보는 것이 아니라, 최적의 사고가 가능하도록 본질적인 요소만 고려하여 새로이 바람직한 형태로 단순화시킴으로써 얻게 되는 특성이다.

4 형식성

수학은 형식성이 강한 학문이다. 곧, 수학은 형식 언어로 쓰여진 공리를 바탕으로 하여 형식적인 추론 규칙에 의해 전개될 수 있는바, 이 때 공리나 기호의 의미는 중요하지 않다. 수학의 형식성은 수학적 증명의 엄밀성과 수학 체계의 무모순성을 보장하기 위한 장치로서, 19세기 말 독일의 힐베르트에 의해 더욱 명확하게 제시되었다. 그러나 형식화된 수학과 무의미한 기계적 조작은 구별된다. 무의미한 기계적 조작은 수학이 아니지만, 의미와 무관해 보이는 형식화된 수학은 필요하다면 언제든지 의미가 부여될 수 있기 때문이다.

5 계통성

수학적 개념의 성장은 어떤 기초적인 내용을 기반으로 하여 그 기반 위에 다른 내용을 더 첨가함으로써 기초적인 내용과 새로운 내용을 일관성 있게 이어 나가면서 이루어진다. 이러한 성장 과정을 거친다는 의미에서 수학은 계통적이라 할 수 있다. 계통성은 수학 교육 과정의 구성에 핵심적인 역할을 한다. 즉, 계통성은 학습 내용의 순서를 정할 때 논리적 연결성을 가지고 학습이 단계적으로 이루어지도록 해 주는 것이다. 잘 알려진 대로 자연수, 정수, 유리수, 실수로의 확장은 바로 이러한 계통성의 전형적인 예라고 할 수 있다.

6 직관성과 논리성

유클리드의 기하와 같이 수학은 엄밀한 논리적 구조로 이루어져 있다. 즉, 분석적이고 단계적으로 전제나 선행 명제로부터 결론이나 후속 명제가 정당하게 이끌어 내어지고 있는 것이다. 따라서, 수학자들은 아직 부정되지는 않았지만, 페르마의 정리나 골드바하의 추측 등과 같이 전제로부터 논리적으로 정당화하지 못한 것을 수학적 영역으로 도입하기를 꺼리는 실정이다. 그러나 논리적으로 정당화할 대상은 사실상 직관에 의해서 발견, 발명된다. 직관은 사고 대상을 인지하는 활동이 다소 불분명하지만 전체를 감지할 수 있는 사고이며, 이론 전개의 선행, 방향, 기틀을 마련해 주는 직감적 아이디어로서 이론과 구체를 맺어 주는 것 또는 구체에

서 논리의 방향을 시사해 주는 것이다. 따라서 직관적 사고는 수학의 발명 또는 발견된 수학의 정리에 정당성을 부여하는 데 필수적이다. 논리성은 수학의 생성, 발전 과정에서 추진력의 역할을 맡아 온 것으로 수학의 내용을 모순 없이 체계화하여 질서 있는 구조를 갖춘 교과로서의 자격을 갖추게 해 준다. 이에 대한 학습은 학생의 사고를 효율적이면서도 정연하게 가다듬어 세련된 사고를 가능하게 해 준다.

7 일반화와 특수화

일반화는 하나의 대상에 대한 고찰로부터 그 대상을 포함한 집합에 대한 고찰로 옮아가는 것을 말한다. 예를 들면, 삼각형에 대한 고찰로부터 임의의 다각형에 대한 고찰로 나아가거나, 예각의 삼각비에 대한 연구로부터 임의의 각의 삼각함수에 대한 연구로 나아가는 것 등이 일반화이다. 이러한 일반화를 통하여 수학이나 과학에서 많은 법칙을 발견하였으며, 때로는 단 한 가지 사실을 관찰하고도 일반화를 통하여 놀라운 일반적인 법칙을 발견하기도 하였다. 한편, $a^0 = 1(a \neq 0)$ 나 $0 \neq 1$ 등은 일반화와 반대되는 개념의 특수화이다. 특수화는 주어진 대상의 집합에 대한 고찰로부터 그 집합에 포함되는 더 적은 집합 또는 단 하나의 대상에 대한 고찰로 옮아가는 것이다. 이러한 특수화는 일반화된 명제를 검증하거나 그 증명 또는 풀이의 힌트를 제공하기도 한다.

2. $m+n=16$

(1) 곱셈군 $\mathbb{Z}_3^* = \mathbb{Z}_3 - \{0\}$ 에서 항등원은 1 이므로 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \ker\phi \Leftrightarrow ac \equiv 1 \bmod 3$ 이다.

$\mathbb{Z}_3$ 에서 $a = c^{-1}$ 이므로 $a=c=1$ 또는 $a=c=2$ 이고 $b=0,1,2$ 이다. 따라서 $\ker\phi$ 는 위수가 6 인 군이다. 또, $m = |G| = |\ker\phi| \cdot |\mathbb{Z}_3^*| = 6 \times 2 = 12$ 이다.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 로 놓으면 A 의 위수는 6 이다. 즉, $\ker\phi$ 는 위수가 6 인 순환군이다. 따라서 $\ker\phi$ 의 부분군의 개수 $n=4$ 이다. 따라서 $m+n=16$ 이다.

3. 멱 $(-5,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 1\}$

(1) $a_n = \dfrac{n}{3^{n+1}}$ 로 놓으면 수렴반지름 $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 3$ 이다.

(2) $|x+2| = 3$ 일 필요충분조건은 $x=-5, 1$ 이고

① $x=-5$ 이면 급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{3}$ 이므로 급수는 발산하고

② $x=1$ 이면 급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(3)^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3}$ 이므로 급수는 발산한다.

따라서 수렴구간은 $(-5,1)=\{x\in\boldsymbol{R}\mid -5<x<1\}$ 이다.

4. 서 $V(X)=npq=12\times\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{35}{12}$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈을 순서쌍 (a,b) 로 나타내면

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	

두 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈은 위의 경우이거나 그 밖의 경우가 되는 두 가지 결과를 갖는다. 이것은 베르누이시행이고 12 회 반복이므로 이항시행이다. 부등식 $a^2+b^2\le 25$ 를 만족할 확률을 p 라고 할 때, $p=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$ 이므로 $q=\frac{7}{12}$ 이다. 부등식 $a^2+b^2\le 25$ 를 만족하는 횟수를 확률변수 X 라 하면 확률분포는

$$f(x)={}_{12}C_x\left(\frac{5}{12}\right)^x\left(\frac{7}{12}\right)^{12-x}\ (\text{단, } x=0,1,\cdots,12)\ \text{또는}\ X\sim B\left(12,\frac{5}{12}\right)$$

이다. 따라서 이항분포의 분산은 $V(X)=npq=12\times\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{35}{12}$ 이다.

5. Piaget에 따르면 개인에게는 환경과의 균형을 이룩하여 행동 및 사고 양식의 무모순성을 달성하려는 기본적인 욕구가 있고, 그러한 균형화 과정에서의 행동 및 사고 양식의 변화가 학습이다. 개념 이해을 이러한 균형화의 과정에서 파악한다면, 새로운 개념을 기존의 인지 구조에 통합시기키는 동화 작용과 새로운 개념에 맞게 학습자의 기존의 인지 구조를 변화시키는 조절 작용을 통해 그 의미가 학습자의 인지 구조의 일부로 구성되었을 때 개념이 이해된 것이라고 할 수 있다. Piaget의 이러한 입장에 기초하면, 학생들이 개념을 이해하는 데 어려움을 겪는 원인은 크게 두 가지로 볼 수 있다.

① 새로운 개념을 기존의 인지 구조에 적절히 동화하기 어려운 경우이다. 이는 새로운 개념과 관련지을 수 있는 인지 양식이 학습자의 기존의 인지구조에 결여되어 관계망을 형성하는 것이 어려운 경우이다.

② 새로운 개념의 이해가 학생의 기존의 인지 구조의 조절을 필요로 하는 경우이다. 이는 어떤 특정한 맥락에서 성공적이고 유용했던 선행 지식이 새로운

상황이나 더 넓어진 맥락에서는 부적합한 지식이 됨에 따라 새로운 개념의 이해를 위해서는 기존 인지 구조의 조절이 일어나야 하는데, 이와 같은 새로운 기존 인지 구조의 변화가 일어나기 수빈지 않다는 데에 이해의 어려움의 원인이 있다. 이와 같이 '근접발달 영역'내에서의 인지 구조의 '재조직화'에 관한 장애를 '인식론적 장애'라고 한다.

인식론적 장애는 새로운 지식의 구성을 방해한다는 부정적인 관점에서만 볼 것이 아니라 이해의 토대이며 또한 그것의 극복을 통해 더 높은 수준의 이해로 나아갈 수 있다는 긍정적인 관점에서 파악되어야 한다.

(1) 소수 개념과 관련된 인식론적 장애 분석

가. 소수를 단위를 수반한 양의 표현으로 이해한다.

학교수학에서 소수는 주로 자를 이용한 길이의 측정이나 눈금저울을 사용한 무게의 측정 맥락에서 측정단위 변환과 관련지어 등장한다.

예를 들어 $3.25m$ 를 미터단위로 표현된 $325cm$ 로 생각하게 된다. 그렇게 되면 소수는 단위를 수반한 양의 표현으로 여겨지면서 적절한 단위가 수반되지 않는 소수는 의미가 없는 것으로 인식되어 $3.25m \times 4$ 는 의미가 있지만

$4m \times 3.25 = 3.25m \times 4$,

$7.25m \times 4.38 = 7.25 \times (4+0.3+0.08) = 77.25 \times 4 + 7.25 \times 0.3 + 7.25 \times 0.08$

등은 의미가 없는 것으로 보게 된다.

그리고 소수 곱셈의 의미 부여를 단지 넓이 모델에 기초한 두 길의 곱으로 해석 가능한 경우로 한정하고 있는데, 이 역시 넓이의 단위를 적절하게 선택한 경우에 한해서만 $2.5(cm) \times 3.25(cm) = 8.125(cm^2)$ 라고 쓸 수 있다. 그러면 $2.5(cm) \times 3.25(cm) = 812.5(mm^2)$ 이므로 $2.5 \times 3.25 = 812.5$ 가 아니라 $2.5 \times 3.25 = 8.125$ 임을 정당화할 수 있는 방법은 없다(Brousseau). 이러한 생각은 방정식에까지 영향을 주어 $a^2 - a$ 와 같이 서로 차수가 다른 항을 빼는데 장애로 작용할 수 있다. 왜냐하면, 이는 넓이에서 길이를 뺀다는 의미를 갖기 때문이다.

나. 소수를 소수점을 갖는 자연수로 이해한다.

소수를 '단위가 바뀐 자연수' 즉 '소수점이 있는 자연수'로 생각하는 것으로 예를 들어 3.25 는 100 을 단위로 하는 325 라고 파악하는 것이다.

이러한 자연수와의 부적절한 통합은 단지 소수점을 찍는 방법만을 다루면

서 자연수와 똑같은 방식으로 행해지는 기계적인 소수 계산법에 의해 강화된다. 이렇게 되면 선행 지식인 자연수가 소수 개념 형성에 장애가 된다. 예를 들어

① 소수를 이산적으로 파악하여 3.25 바로 이전의 수는 3.24 로 생각하고, 3.25 와 3.26 사이의 소수를 발견하지 못한다. 즉 소수의 위상적 구조인 조밀성을 이해하는데 방해를 받는다.

② 곱셈에 의해 수가 작아지고 나눗셈에 의해 수가 커질 수 있다는 것을 이해하지 못하고, $0.32 = 0.320$ 또는 $1.5 = 1.499\cdots$ 와 같은 소수의 '이중 표기'를 받아들이지 못하게 된다.

③ 스칼라 소수의 곱이나 새로운 유형의 나눗셈을 인식하기가 어렵게 된다. $4m \times 3.25$ 는 자연수의 곱셈과 같이 동수누가로 생각할 수 없으므로 이러한 곱셈을 해설할 수 없다.

다. 무한소수는 항상 유한소수로 대체될 수 있는 것으로 판단한다.

라. 무한소수를 무한 과정에 대응하는 잠재적 무한 개념으로 이해한다.

6. ① 표 만들기와 식 세우기 전략이다.

② $150x + 22750 = 33250 \therefore x = 70$

	남	여	계
학생 수	350	150	500
평 균	65	x	66.5
총 점	22750	$150x$	33250

7. $a_{10} = f(10) = 1281$

수열 $\{f(0), f(1), f(2), \cdots\}$ 의 계차행렬을 만들면

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 17 & 49 & 105 \\ 2 & 14 & 32 & 56 & \\ 12 & 18 & 24 & & \\ 6 & 6 & & & \end{pmatrix}$$

이므로 $f(n) = 1{}_nC_0 + 2{}_nC_1 + 12{}_nC_2 + 6{}_nC_3 = n^3 + 3n^2 - 2n + 1$ 이다. 따라서

$$a_{10} = f(10) = 1281$$

8. (1) $\alpha(t)' = (-\frac{3}{5}\sin\frac{t}{5}, \frac{3}{5}\cos\frac{t}{5}, \frac{4}{5}) = T_\alpha(t)$,

$\beta(t)' = (-\frac{3}{5}\sin\frac{t}{5}, \frac{3}{5}\cos\frac{t}{5}, -\frac{4}{5}) = T_\beta(t)$ 이므로

$T_\alpha(t)' = (-\frac{3}{5^2}\cos\frac{t}{5}, -\frac{3}{5^2}\sin\frac{t}{5}, 0)$ 이고 $T_\beta(t)' = (-\frac{3}{5^2}\cos\frac{t}{5}, -\frac{3}{5^2}\sin\frac{t}{5}, 0)$ 이다. 따라서 $\kappa_\alpha(t) = \| T_\alpha(t) \| = \frac{3}{25} = \| T_\beta(t) \| = \kappa_\beta(t)$ 이다.

(2) $N_\alpha(t) = \frac{T_\alpha(t)}{\kappa_\alpha(t)} = (-\cos\frac{t}{5}, -\sin\frac{t}{5}, 0)$ 이고

$B_\alpha = T_\alpha(t) \times N_\alpha(t) = (\frac{4}{5}\cos\frac{t}{5}, -\frac{4}{5}\sin\frac{t}{5}, \frac{3}{5})$ 이다.

$\tau_\alpha(t) = -B_\alpha{}'(t) \cdot N_\alpha = \frac{4}{25}$ 이다. 같은 방법에 의해서

$\tau_\beta(t) = -B_\beta{}'(t) \cdot N_\beta = -\frac{4}{25}$ 이다. 따라서 $\tau_\alpha(t) = -\tau_\beta(t)$ 이다.

9. $\frac{\pi(e^{-1} - e^{-2})}{3}$

10. (1) 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 은 0 으로 수렴하는 실수열이고

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

(2) 0 으로 수렴하는 무리수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(0)}{a_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{a_n} = 0$$

(1)과 (2)에 의해서 f 는 $x = 0$ 에서 미분 불가능하다.

11. $F_1 = 1 = F_2$ 이고, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ (n \geq 3)$ 이므로 $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ 를 단순연분수로 나타내면 $\frac{F_{n+1}}{F_n} = \langle 1, 1, 1, \cdots, 1 \rangle$ 이다.

n			0	1	2	3	4	5	$\cdots$
몫			1	1	1	1	1	1	$\cdots$
분자	0	1	1	2	3	5	8	13	$\cdots$
분모	1	0	1	1	2	3	5	8	$\cdots$

따라서 $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ 이다.

12. (1) $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ 의 표준기저는 $\{1,\ \sqrt{2}\}$ 이고, $\boldsymbol{Q}(\sqrt{3})$ 의 표준기저는 $\{1,\ \sqrt{3}\}$ 이다.

따라서 T 의 행렬 표현은

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

이므로 고유다항식은 $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ 이다. 따라서 고윳값은 $1,\ -1$ 이다.

① $T(1) = 1$ 이고 ② $T(\sqrt{2}) = -\sqrt{3}$

이므로 고윳값 $\lambda = 1$ 에 대응하는 고유벡터는 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이고 고윳값 $\lambda = -1$ 에 대응하는 고유벡터는 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 이다.

(2) 유리수 체 $\boldsymbol{Q}$ 위에서 $\sqrt{2}$ 의 대수적 켤레원은 $\pm\sqrt{2}$ 이고 $\pm\sqrt{2} \notin \boldsymbol{Q}(\sqrt{3})$ 이다.

따라서 이차체 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ 와 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{3})$ 은 체로서 동형적이지 않다.

3교시(B 형) : 기입형 및 서술형

1. $k = \dfrac{\sqrt{38}}{18}$, $\tau = \dfrac{3}{19}$ 이므로 $|k| + |\tau| = \dfrac{\sqrt{38}}{18} + \dfrac{3}{19}$

(1) $T(\vec{u}) = \vec{u} + (1, -2, 3)$ 이므로 T 는 평행이동이고 A 가 직교행렬이므로 F 즉, $F = T \circ A$ 는 등장사상이다. 따라서 $F(\alpha(t))$ 의 곡률과 $\alpha(t)$ 의 곡률은 같고, 열률의 절댓값도 같다.

(2) $\alpha'(t) = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 2t)$ 이므로 $\alpha'(0) = (3, 0, 3)$ 이므로 $\|\alpha'(0)\| = 3\sqrt{2}$ 이고, $\alpha''(t) = (-6t, 6, 2)$ 이므로 $\alpha''(0) = (0, 6, 2)$ 이다.

따라서 $\alpha' \times \alpha''(0) = 6(-3, -1, 3)$ 이다. 따라서 $\|\alpha' \times \alpha''(0)\| = 6\sqrt{19}$ 이다.

또, $\alpha'''(t) = (-6, 0, 0)$ 이므로 $\alpha'''(0) = (-6, 0, 0)$ 이다. 따라서

$$k = \frac{\sqrt{38}}{18}, \quad \tau = \frac{3}{19}$$

2. $f(z) = e^{\pi z}$ 는 정함수이고 $f(z)$ 의 부정적분 $F(z) = \dfrac{1}{\pi}e^{\pi z}$ 이고

$$F\left(\frac{i}{2}\right) - F(i) = \frac{1+i}{\pi}$$

[정리] f 가 영역 D 에서 연속이면 다음은 동치관계이다.

(1) 영역 D 에서 f 의 부정적분 F 가 존재한다.

(2) C_1 , C_2 가 시점이 z_1 이고 종점이 z_2 인 D 내의 임의의 경로이면

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

(3) C 가 D 내에 있는 닫힌경로이면 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ 이다.

3. (1) 철수는 방정식에서 등호를 동치관계로 나타내는 기호로 명확히 파악하고 있지 못한데서 나타나는 오류이다.

(2) 이러한 오류를 지도할 때는 먼저 $7 \times 2 - 3 = 1 + 2 \times 5$ 와 같은 등식을 지도한 후 방정식의 의미를

$$7 \times 2 - 3 = 1 + 2 \times 5 \ \rightarrow\ 7 \times \square - 3 = 1 + 2 \times 5 \ \rightarrow\ 7 \times a - 3 = 1 + 2 \times 5$$

와 같은 과정을 통해 이해시키는 방법을 생각해 볼 수 있는데, 이는 산술과 대수를 연결시키는 좋은 방법이 될 수 있을 것이다. 또 여러 가지 방정식을 구성해 보게 하는 것도 등식으로서의 방정식의 개념 이해에 도움이 될 것이다.

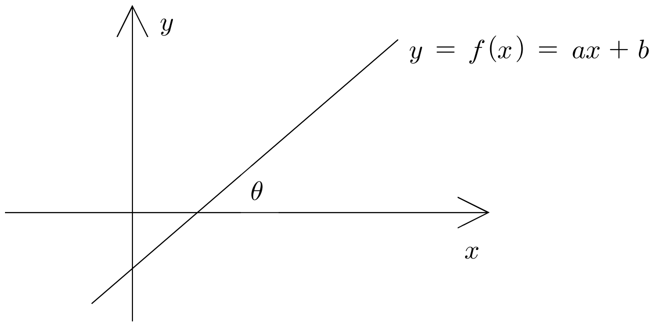
4. (1) 이 추측을 얻기 위해 교사는 “그 점에서 미분계수는 어떻게 될까요?” 라는 유도질문을 하였다.

(2) ㈎ : 전면적 (반례)

1단계 : 연속함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 연속이라는 보장이 없다.

예를 들어 $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ 이고 $f(x) = 0$ $(x = 0)$

5.



① 모든 점에 대한 순간 변화율이 일정하다. 즉, $\frac{df(x)}{dx} = a$ 이 미분방정식의 해로서 $y = f(x) = ax + b$ 가 유도된다.

② 시각적 관점에서 기울기는 직선이 x 축과 이루는 각이고 이는 좌표축의 단위길이가 변하면 함께 변한다. 시각적 관점에서 기울기는 $\tan\theta$ 또는 ‘가로길이와 세로길이의 비’로 표현된다.

③ 분석적 관점에서 기울기는 함수의 성질이고 함수의 표현에 의존하지 않는다. 이러한 관점에서 기울기는 좌표축에 단위길이를 변화시켜도 그 불변성을 유지하며, 미분계수나 두 양의 차의 비, 함수식 $y = f(x) = ax + b$ 에서 a 의 값으로 표현된다.

④ 고정된 기준점에 대한 변화량의 비가 일정하다. 즉, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$

⑤ 임의의 기준점에 대해 변화량의 비가 일정하다. 즉, $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = a$ 이다. x, y 는 임의의 수이므로 $y = 0$ 으로 두고 $b = f(0)$ 으로 둔다면 $f(x) = ax + b$ 가 얻어진다.

※ 교수・학습 방법 및 유의점

- 실생활에서 좌표가 사용되는 예를 찾아보고 이를 수직선과 좌표평면 위에 표현해보며, 그 유용성과 편리함을 인식하게 한다. (창의 · 융합, 의사소통, 태도 및 실천)
- 그래프는 증가와 감소, 주기적 변화 등을 쉽게 파악할 수 있게 해준다는 점을 인식하게 한다.
- 다양한 상황을 일상 언어, 표, 그래프, 식으로 나타내고 이들 사이의 상호 변환 활동을 하게 한다.(의사소통)
- 속력과 거리, 속력과 시간과 같은 실행활의 예를 통해 정비례와 반비례 관계를 직관적으로 이해하게 하고, 정비례와 반비례 관계가 성립하는 실생활의 예를 찾아 설명하게 한다.
- 함수의 개념은 다양한 상황에서 한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계를 이용하여 도입한다. (문제해결)
- 다양한 상황을 이용하여 일차함수와 이차함수의 의미를 다룬다.(창의 · 융합)
- 함수의 그래프를 그리고 여러 가지 성질을 탐구할 때 공학적 도구를 이용할 수 있다. (정보처리, 의사소통)
- '함수의 그래프' 용어는 교수・학습 상황에서 사용할 수 있다.

6. 률변수 X와 확률변수 Y의 주변 확률밀도함수는 각각

(1) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2)\,dy = \frac{3}{2}(x^2+\frac{1}{3})$ (단, $0<x<1$)

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2)\,dx = \frac{3}{2}(y^2+\frac{1}{3})$ (단, $0<y<1$)

따라서 $f_X(x)\times f_Y(y) = \frac{3}{2}(x^2+\frac{1}{3})\frac{3}{2}(y^2+\frac{1}{3}) \neq \frac{3}{2}(x^2+y^2) = f(x,y)$ 이다. 즉, 두 확률변수 X와 Y는 서로 독립이 아니다.

(2) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x(x^2+\frac{1}{3})\,dx = \frac{5}{8}$, 같은 이유로 $E(Y) = \frac{5}{8}$

7. (1) $A = [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(2) A의 특성다항식 $h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ 이므로 고윳값은 $\lambda = 1, 2, 3$ 이다.

각 고윳값에 대응하는 고유공간은 다음과 같다.

$$W_1 = <(1,0,0)>,\ W_2 = <(1,1,0)>,\ W_3 = <(1,2,1)>$$

3차 정사각 행렬 A 의 고윳값이 서로 다르므로 A 는 대각 가능화 행렬이다. 즉, 선형변환 T는 대각 가능한 선형변환이다.

8. (1) 위상공간 $(\boldsymbol{R}, \mathfrak{I})$ 의 부분집합 A 가 콤팩트이기 위한 필요충분조건은 A 가 유한집합이다. 따라서 $(A, \mathfrak{I}_A)$ 는 이산공간이므로 $(A, \mathfrak{I}_A)$ 는 정규공간이다. 실제로

$$F_1 = G_1,\ F_2 = G_2$$

로 놓으면 위 조건을 만족한다.

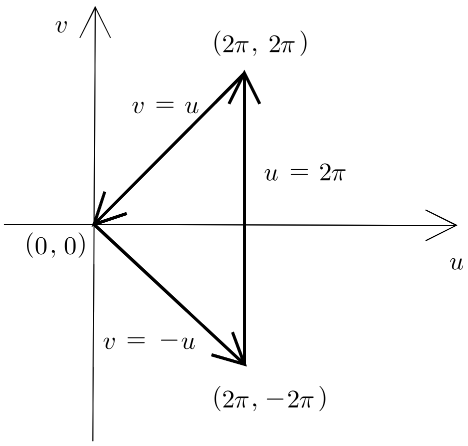
(2) $(\boldsymbol{R}, \mathfrak{I})$ 에서 공집합이 아닌 임의의 두 열린집합 G_1, G_2 에 대하여 $G_1 \cap G_2$ 는 무한집합이다. 따라서 $F_1 \subset G_1, F_2 \subset G_2$, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ 를 만족하는 열린집합 G_1, G_2 가 존재할 필요충분조건은 $F_1 = \varnothing$ 이거나 $F_2 = \varnothing$ 이다.

9. (1) 먼저 $u = x + 2y$, $v = x - 2y$ 로 놓으면

① $(0, 0)$ 에서 $(0, \pi)$ 로 잇는 선분은 $(0, 0)$ 에서 $(2\pi, -2\pi)$ 로 잇는 선분이고

② $(0, \pi)$ 에서 $(2\pi, 0)$ 으로 잇는 선분은 $(2\pi, -2\pi)$ 에서 $(2\pi, 2\pi)$ 로 잇는 선분

③ $(2\pi, 0)$ 에서 $(0, 0)$ 으로 잇는 선분은 $(2\pi, 2\pi)$ 에서 $(0, 0)$ 으로 잇는 선분이다.



x, y 를 u, v 에 관하여 풀면 $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{4}(u-v)$ 이다.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

이다. 따라서

$$\iint_R \sin(x+2y)\cos(x-2y)\,dA = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_{-u}^{u} \sin u \cos v\, dv\, du = \frac{\pi}{2}$$

10.

(1) $(|a_n| - |b_n|)^2 = |a_n|^2 - 2(|a_n| \cdot |b_n|) + |b_n|^2 \geq 0$ 이므로 $|a_n|^2 + |b_n|^2 \geq |a_n| \cdot |b_n|$ 이

고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 도 수렴한다. 비교판정법에 의해서 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|$ 도 수렴한다. 즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 절대수렴한다.

(2) $a_n = \frac{1}{n}$ 로 놓으면 양항수열 $\{a_n\}$ 은 감소수열이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다. 이제 $\{b_n\} = \{1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, \cdots\}$ 이므로 $-1 \le B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \le 1$ 이다. 즉, 수열 $\{B_n\}$ 은 유계인 수열이다. 디리클레 판정법에 의해서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 수렴한다. 즉, $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots$ 은 수렴한다.

[정리 1] **디리클레 판정법**

양항수열 $\{a_n\}$ 이 감소수열이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이고 $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ 라 할 때 $\{B_n\}$ 이 유계인 수열이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 수렴한다.

[정리 2] **아벨판정법**

양항수열 $\{a_n\}$ 이 감소수열이고 극한이 존재하며 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 수렴한다.

11. (1) R가 유리수체 $\boldsymbol{Q}$의 부분환이므로 $\frac{a}{s}$가 R의 단원일 필요충분조건은 $\frac{s}{a} \in R$ 이다. 따라서 $a \in S$ 이다. 따라서 단원군 $U(R) = R - M$ 이다.

(2) (1)의 결과에 의해서 R의 이데알 M은 R의 유일한 극대이데알이다.

(3) R이 정역이고 I가 $1_R \notin I$인 R의 이데알이므로 $I \subset N$인 R의 극대이데알이 존재하고, M이 R의 유일한 극대 이데알이므로 $I \subset M$이다.

<이행래 전공수학 교수>

약 력

- 이학박사
- (現) 박문각임용 전공수학 대표강사

▶ 카페 : http://cafe.daum.net/kaimath

학원 주소 : 서울특별시 동작구 노량진로 171(노량진동)

*지하철

노량진역 1호선 출구 사육신공원 방향 200m

노량진역 9호선 8번 출구 사육신공원 방향 250m

유튜브 검색창에 “이행래 전공수학”을 입력하시면 이행래 교수님의 다양한 수업 영상(합격설명회,기출해설,강의영상 등)을 무료로 수강하실 수 있습니다.

이행래 전공수학

* 이학박사, 카페: http://cafe.daum.net/kaimath

2019년 9~11월 강의 안내

강좌명	강의 일시	강의 기간	개강일~종강일	수강료
9~11월 모의고사 및 내용 총정리 (10주)	수목 | 10:00~16:00	10주	9/4(수)~11/14(목)	하단참조

▶ 교재: 프린트

▶ 강의 진행

매주 수요일 : 모의고사 실시 후 교과 교육론 해설

매주 목요일 : 전공 부분 해설 및 유사 문제 해설

※ 1~4주는 기출문제를 기초로 하여 기출문제와 형식과 내용 면에서 유사한 형식으로 진행할 계획이며, 시험 범위를 미리 공개하여 진행할 계획입니다. 이 기간은 모의고사와 함께 전 과목을 다시 정리하는 시간을 함께 갖자는 것이 목적입니다.

[수강료]

강좌명	일반	2018년 또는 2019년 이행래 전공 수학 2개월 이상 기수강생
1~4회 모의고사 (9/4~10/3)	22만원	20만원
5~10회 모의고사 (10/9~11/14)	30만원	28만원
1~10회 모의고사 (9/4~11/14)	48만원	46만원

이행래 전공수학

강의 특징

매주 모의고사 실시 후 개별첨삭과 상담 등을 통하여 답안 작성 방법 과 보충학습에 대한 상담, 특정 영역 혹은 문제에 대한 보충 강의(개별) 등을 실시할 예정입니다.

※ 인강생의 경우 시험을 실시 한 후 월요일 오전까지 제출하시면 첨삭하여 드립니다. 제출 방법은 박문각임용고시온라인 측에 문의하시면 됩니다. 또, 가까운 거리에 있으시 분은 학원을 방문(개별적인 약속을 정하여야 합니다.)하여 첨삭 등을 받을 수 있습니다.

주차	시험 영역
1주차	교과 교육론 - 신론(1), 신론(2)　해석학 - 수열 및 연속함수 현대대수학 - 군론　미분기하학 - 정칙곡선
2주차	교과 교육론 - 신론(1), 신론(2), 수와 연산 해석학 - 균등연속과 미분가능성, 적분 가능성 현대대수학 - 군론, 환론과 다항식 환 미분기하학 - 정칙곡선과 법곡률, 측지 곡률
3주차	교과 교육론 - 신론(1), 신론(2), 문자와 식, 함수 해석학 - 급수와 테일러 정리, 이상적분 가능성 현대대수학 - 다항식 환과 체론 미분기하학 - 정칙 곡면
4주차	교과 교육론 - 확률과 통계, 기하, 미적분 해석학 - 함수열과 함수항 급수 현대대수학 - 다항식 환과 체론(2) 미분기하학 - 정칙 곡면(2)
5~10주차	전체 영역을 실제 시험과 같은 양식/ 같은 시간으로 실시할 계획입니다.

※ 추석 명절은 휴강 혹은 특강으로 추후 공개할 예정입니다. (미정)
※ 10월 3일 개천절은 정상적으로 수업을 진행할 계획입니다.
※ 11월 18, 19일은 특강을 계획하고 있습니다.(미정)
특강 내용은
(1) 모의고사를 실시한 후 어려워 하는 내용
(2) 각 과목마다 꼭 알아야 할 내용 등을 중심으로 강의할 계획입니다.
※ 11월 18일 ~ 22일은 강의는 없으나 학원에 출근하여 마지막 질문 혹은 상담 등을 할 예정입니다.